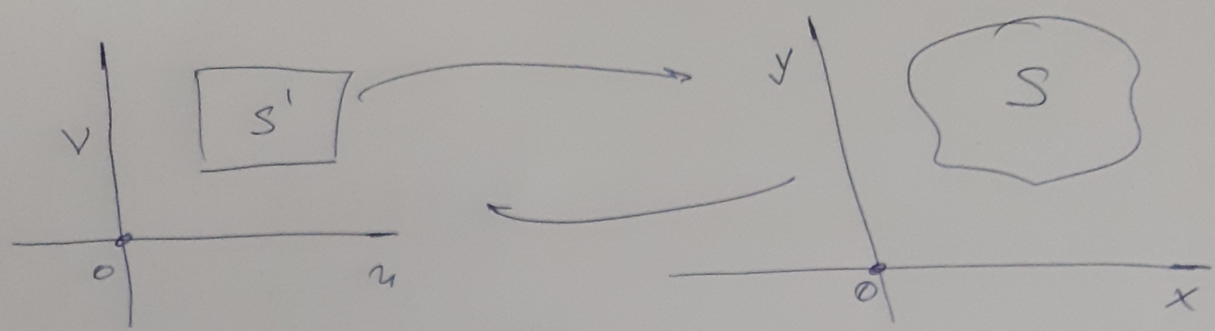
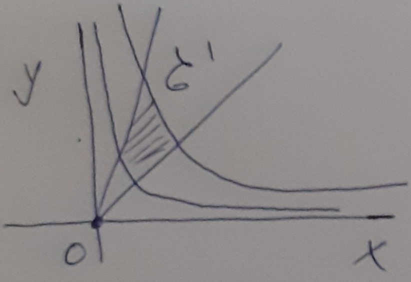
— Смјена промјенљивих у двоструком интегралу.



$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \qquad J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{S'} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,du\,dv$$

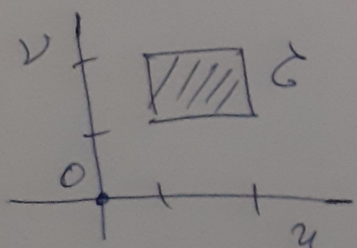
<u>Примјер.</u> Израчунати површину области ограничене кривама $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x$ $(x,y>0)$.



Смјена $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$,

$1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 2$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad J = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}} = \frac{1}{2v}.$$

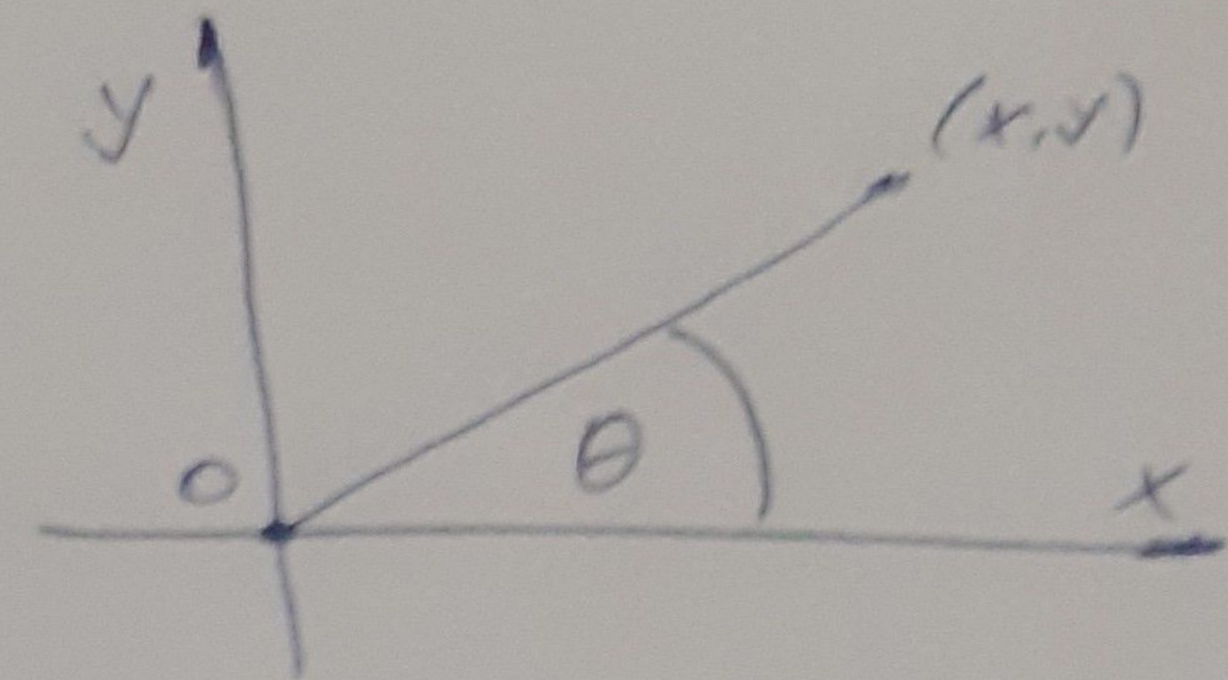


$$|G'| = \iint_{G'} dx\,dy = \iint_G |J|\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Примјер: Поларне координате

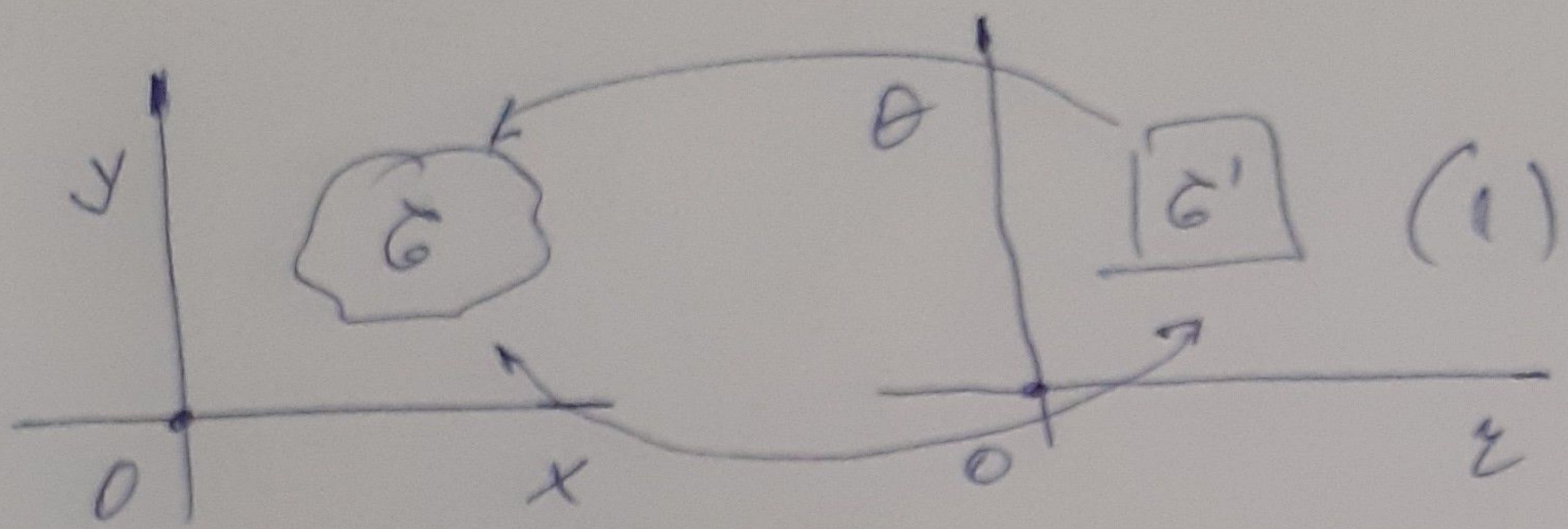
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$



$0 \le r < +\infty$

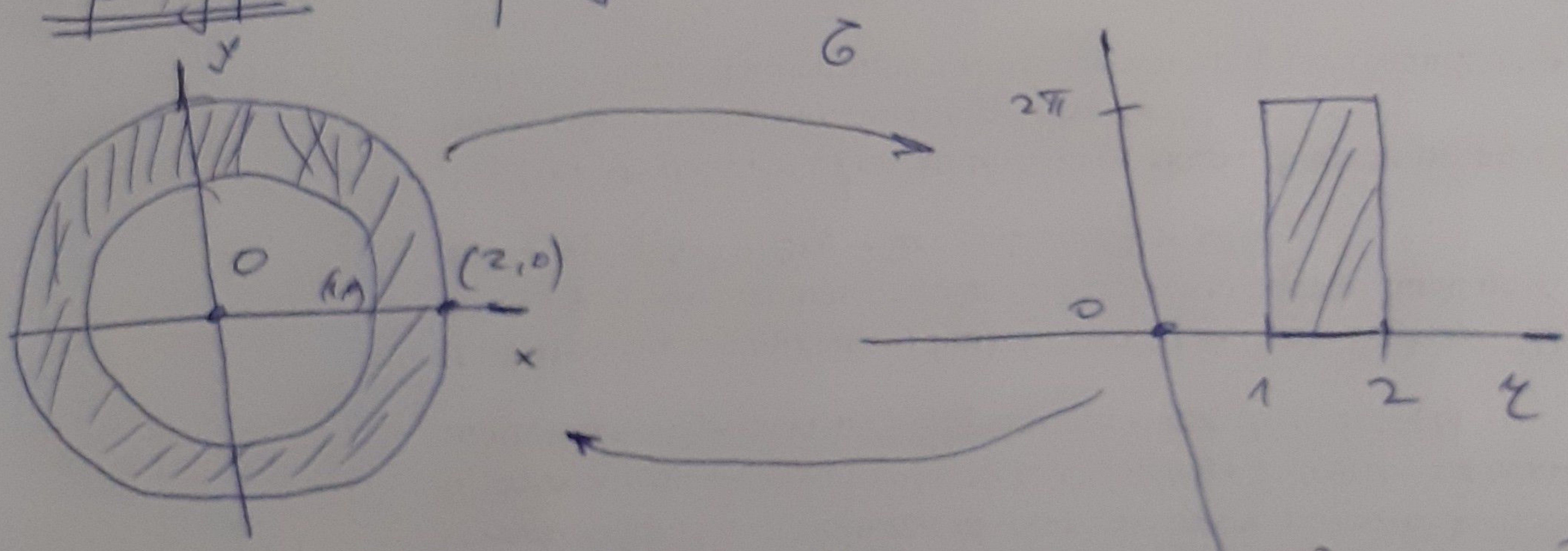
$\theta \in [0, 2\pi) \quad (\theta \in (-\pi, \pi])$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

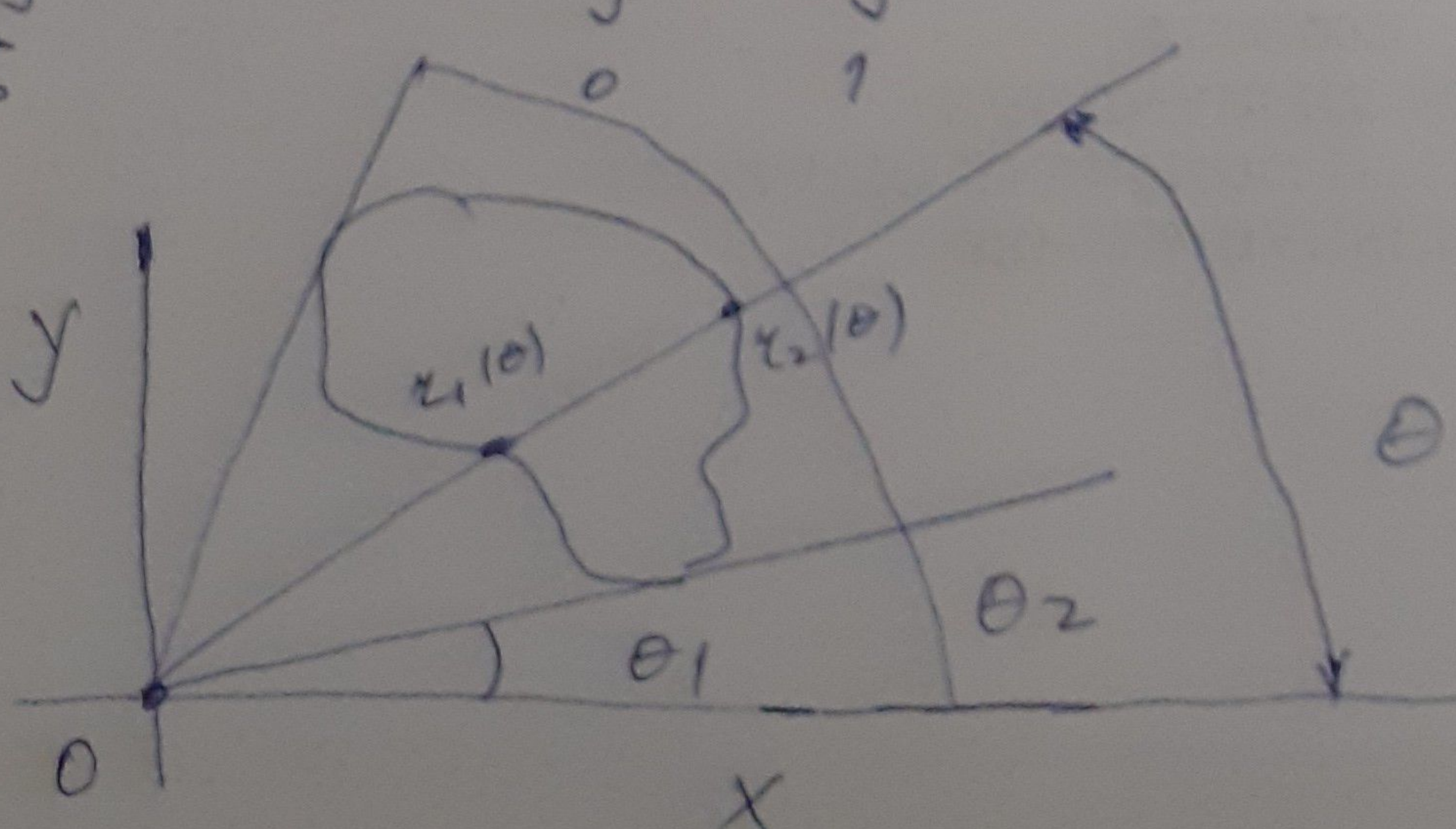


$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta \quad (1).$$

Примјер: Израчунати $\iint_G y\,dx\,dy$, $G = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$.



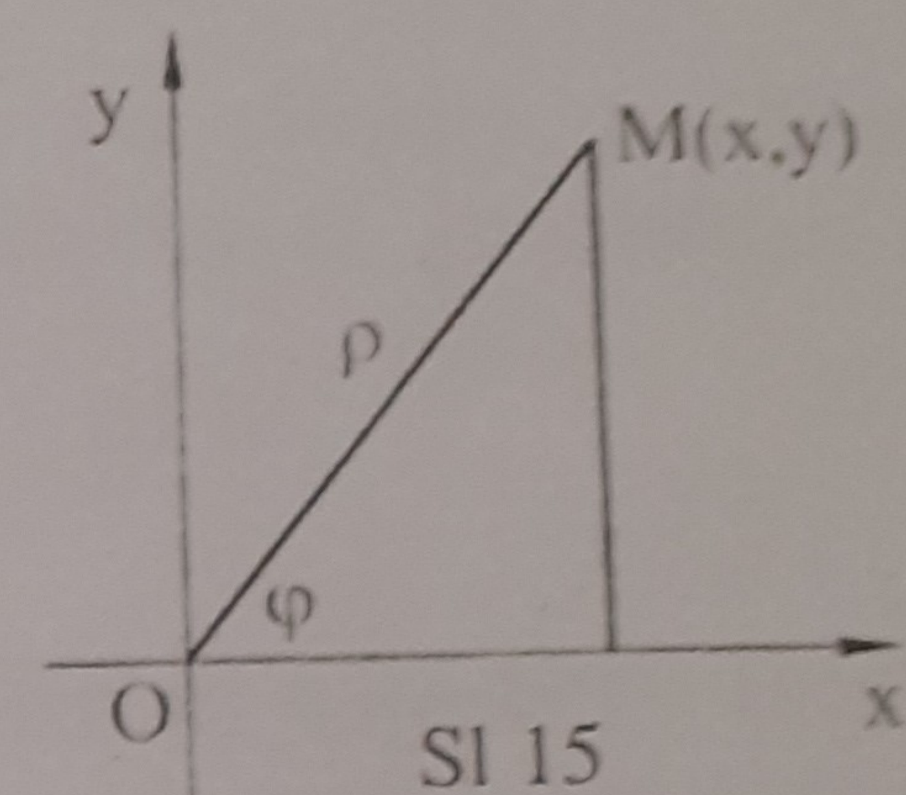
$$\iint_G y\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \sin\theta\, dr = \int_1^2 r^2\, dr \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0.$$



Vratimo se dvostrukom integralu $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$. Neka je funkcija f neprekidna na oblasti S i $f(x,y)=f((\varphi(u,v),\psi(u,v))\equiv F(u,v)$. Tada je $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k = \sum\limits_{k=1}^{n} F(u_k,v_k)\Delta S_k$. Poslije graničnog prelaza za $\lambda\to 0$ (λ -najveći dijametar u podjeli ΔS_i, i=1, 2, 3,..., n) i zamjene $\Delta S_k = |J|\Delta S_k'$, dobijamo jednakost (12).

Primjer 8. Naći formu dvostrukog integrala u polarnim koordinatama. Veza između Dekartovih koordinata tačke (x,y) tačke M i njenih polarnih koordinata (ρ,φ) (Sl 15) je:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi. \qquad (13)$$



Sl 15

Neka se oblast S smjenama (13) preslikava u oblast S'. Izračunajmo jakobijan:

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho .$$

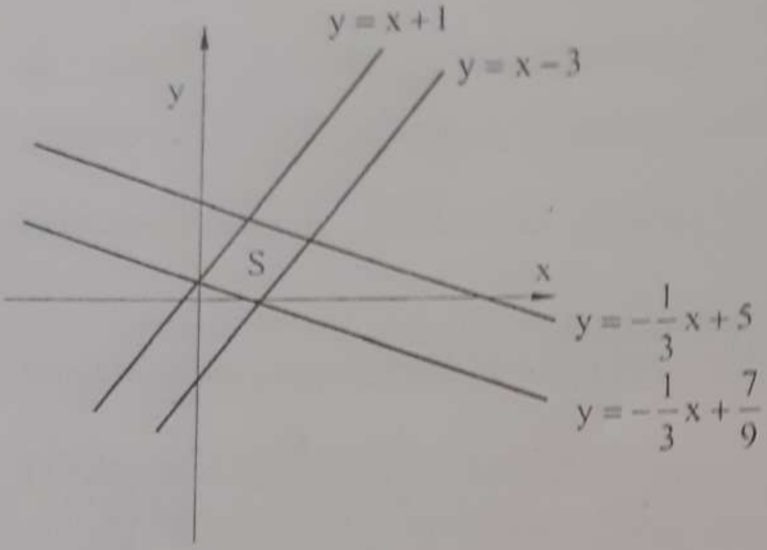
Tada je, saglasno formuli (12), $\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S'} f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)]\rho d\rho d\varphi$.

Primjer 9. Izračunati $\iint\limits_S (y-x)dxdy$, gdje je S oblast ograničena pravama:

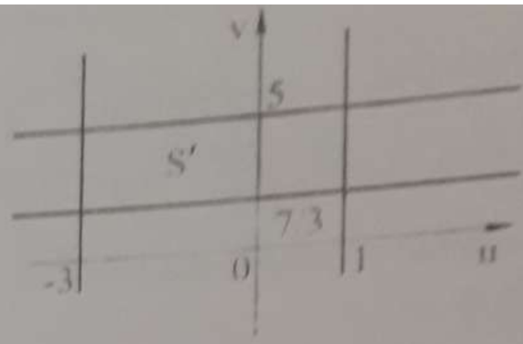
$$y=x+1,\ y=x-3,\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{9},\ y=-\frac{1}{3}x+5.$$

Smjenama $u=y-x$, $v=y+\dfrac{1}{3}x$, odnosno $x=\dfrac{-3u+3v}{4}$, $y=\dfrac{u+3v}{4}$, dobijamo da se oblast S (Sl 16) preslikala u oblast S' (Sl 17) koju ograničavaju prave: $u=1$, $u=-3$, $v=\dfrac{7}{9}$, $v=5$, tj. $S':\begin{cases} -3\le u\le 1 \\ \dfrac{7}{9}\le v\le 5 \end{cases}$. Kako je $J=\begin{vmatrix} -\dfrac{3}{4} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} \end{vmatrix} = -\dfrac{3}{4}$, to je

$$\iint\limits_S (y-x)dxdy = \iint\limits_{S'} u\left|-\frac{3}{4}\right|dudv = \int\limits_{-3}^{1} du\int\limits_{\frac{7}{9}}^{5}\frac{3}{4}udv = -\frac{38}{3}.$$



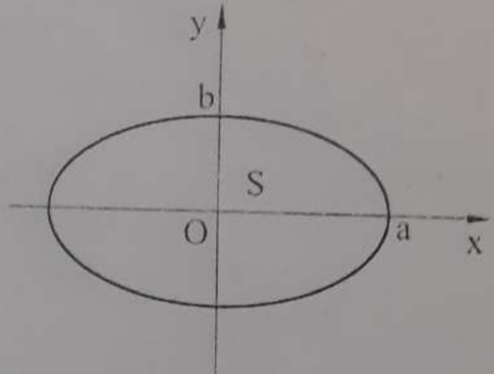
Sl 16



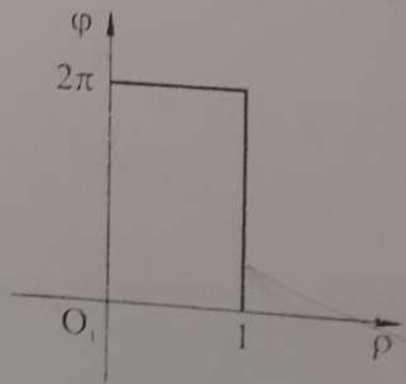
Sl 17

Primjer 10. Izračunati $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$ $(c>1)$, gdje je S oblast ograničena elipsom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Uvedimo (uopštene) polarne koordinate: $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$. Tada se oblast S (Sl 18) preslikava u oblast $S': \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$ (Sl 19). Dalje je $J = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho$ i



Sl 18



Sl 19

$$\iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy = \iint_{S'} \frac{ab\rho}{\sqrt{c^2-\rho^2}}d\rho d\varphi =$$

$$ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{c^2-\rho^2}} = ab\int_0^{2\pi}d\varphi\left(-\sqrt{c^2-\rho^2}\Big|_0^1\right) = 2ab\pi\left(c-\sqrt{c^2-1}\right).$$

e) Primjene dvostrukog integrala

Neke primjene dvostrukog integrala smo već naveli (zapremina cilindra, površina ravnog lika i masa ravne ploče). Navedimo još jednu primjenu iz geometrije, i nekoliko primjena iz mehanike.

1) Izračunavanje površine površi

Neka je površ Σ zadata jednačinom $z = z(x, y)$ i neka je njena projekcija na ravan Oxy oblast S. Pretpostavimo da je u oblasti S funkcija $z = z(x, y)$ neprekidna i da u njoj ima neprekidne parcijalne izvode $z_x'(x, y)$ i $z_y'(x, y)$. Može se dokazati da se površina P_Σ površi Σ izračunava po formuli

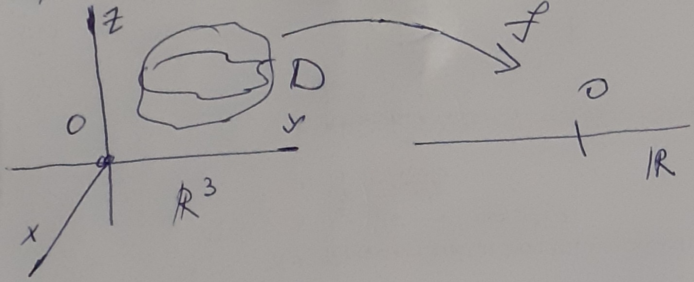
$$P_\Sigma = \iint_S \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}\,dxdy\,. \tag{14}$$

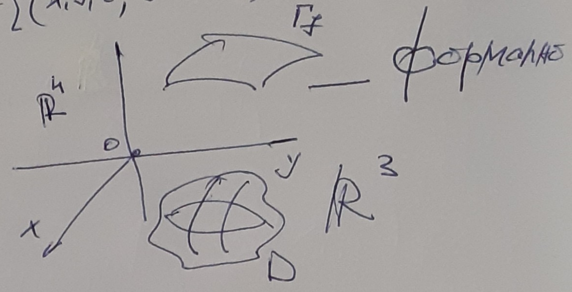
I

Троструки интеграл

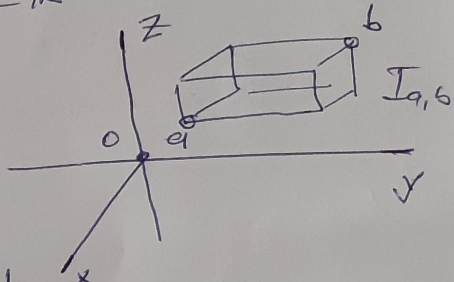
Нека је $D \subset \mathbb{R}^3$ ограничен мјерљив подскуп и $f: D \to \mathbb{R}$ дефинисана и ограничена функција на D.

$\Gamma_f = \{(x,y,z, f(x,y,z)) \mid (x,y,z) \in D\}$





$\Gamma_f \subset \mathbb{R}^4$



За $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$

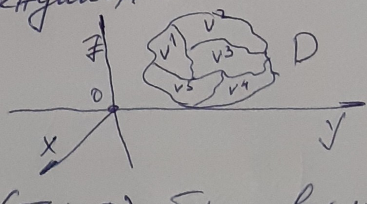
$I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1,2,3\}$

Мјера (запремина) скупа $I_{a,b}$ у $\mathbb{R}^3$,

у ознаци $\mu(I_{a,b}) = |b_1 - a_1|\,|b_2 - a_2|\,|b_3 - a_3|$.

— Уочимо фамилију $T = \{V^i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ мјерљивих (затворених) скупова таквих да је $D = \bigcup_{i=1}^{n} V^i$, $(\mathring{V}^i) \cap (\mathring{V}^j) = \emptyset$ за $i \neq j$. T — подјела скупа D, пар (T, D).

— Уколико, $M^i \in V^i$, $i = 1,2,\dots,n$, $M = \{M^i \mid i = 1,2,\dots,n\}$, онда тројка (T, M, D) чини подјелу са истакнутим тачкама скупа D.



$$\lambda(T) = \max_{1 \le i \le n} \operatorname{diam}(V^i)$$

Дефиниција: Нека је $f: D \to \mathbb{R}$ и (T, M, D) произвољна подјела скупа D са истакнутим тачкама, $T = \{V^i \mid i = 1,\dots,n\}$

Збир $\sigma(f, T, M) = \sum_{i=1}^{n} f(M^i)\,\mu(V^i)$ називамо интегралном сумом функције f по области D

Дефиниција: Ако постоји коначна гранична вриједност

$I = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{i\geq 1} f(M^i)\mu(V^i)$, која не зависи од разбијања области D на $\{V^i\}_{i\geq 1}$ и избора тачака $M^i \in V^i$, онда I називамо троструким интегралом функције f по области D и означавамо са $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (T,M,D))(\lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(f,T,M) - I| < \varepsilon)$.

$f(x,y,z)$ – подинтегрална функција, $f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ – подинтегрални израз.

– Специјално $f \equiv 1 \Rightarrow \mu(D) = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$,

(запремина) мјера области D.

– Ако је густина материје тијела D у свакој тачки $\gamma(x,y,z)$, γ – непрекидна функција, онда маса тијела D се рачуна по формули $m(D) = \iiint\limits_D \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

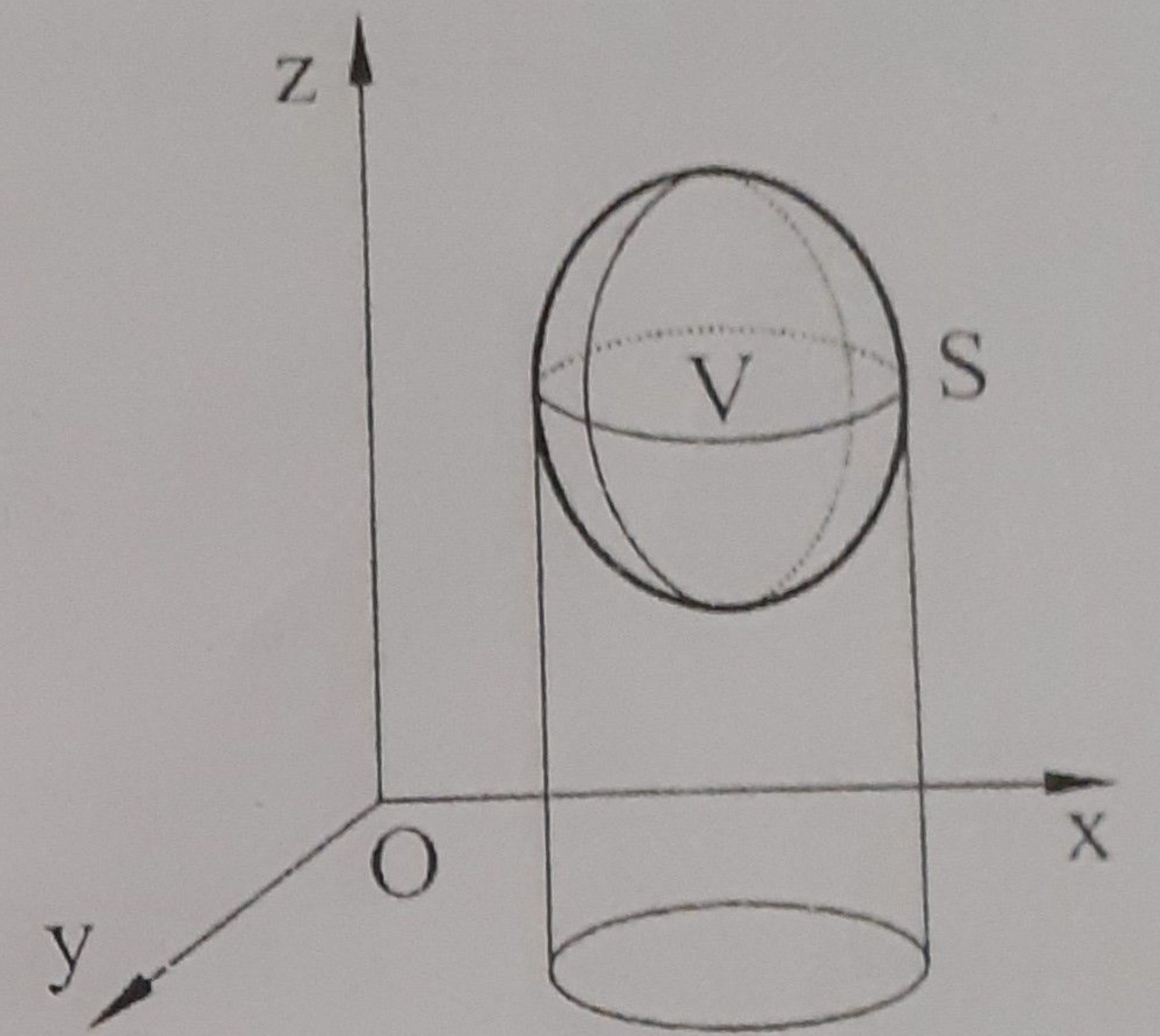
Izraz $f(x,y,z)dxdydz$ nazivamo podintegralni izraz, $f(x,y,z)$- podintegralna funkcija, a V –oblast integracije. Nadalje smatrajmo da su sve funkcije sa kojima radimo integrabilne na odgovarajućim oblastima integracije.

b) Izračunavanje trostrukog integrala

Slično kao kod dvostrukih integrala, uvedimo pojam pravilne oblasti u pravcu ose Oz (Sl 2). To je oblast V ograničena zatvorenom površi S sa svojstvima:

1) Svaka prava koja je paralelna osi Oz i koja prolazi kroz neku unutrašnju tačku iz V prodire površ S u dvjema tačkama,

2) Projekcija tijela V (u pravcu ose Oz) na ravan Oxy je oblast pravilna u pravcu ose Oy.



Sl 2

Slično se definiše i oblast V pravilna u pravcu ose Ox, odnosno ose Oy. Neka je oblast V zadata na sljedeći način:

$$V:\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y) \end{cases},$$

gdje su φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 neprekidne funkcije, prve dvije na odsječku $[a,b]$, a druge dvije na oblasti D –projekcija oblasti V na ravan Oxy. Može se dokazati da je

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx .$$

Integral na desnoj strani zadnje formule zapisujemo u obliku

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz ,$$

tj.

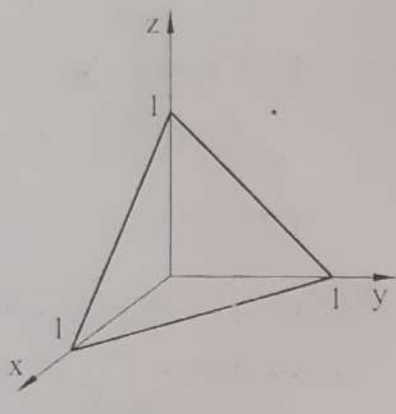
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz . \qquad (1)$$

Pomoću formule (1) izračunavaju se trostruki integrali. Uočimo da se izračunavanje trostrukog integrala svelo na uzastopno izračunavanje tri jednostruka integrala.

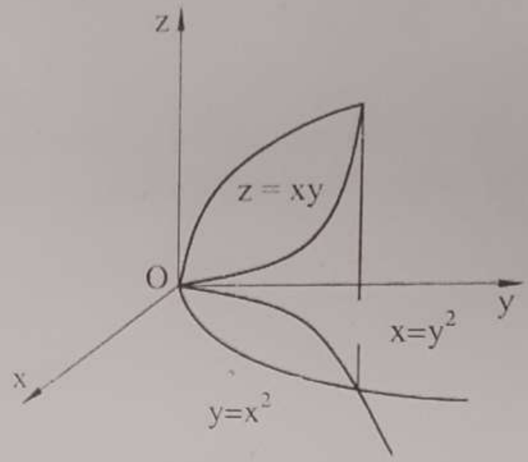
Primjer 1. Izračunati $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, gdje je V oblast ograničena ravnima $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $x+y+z=1$.

Oblast V (Sl 3) možemo zapisati u obliku $V:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1-x \\ 0\le z\le 1-x-y \end{cases}$. Saglasno formuli (1) imamo da je

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\,dx=\frac{1}{24}.$$



Sl 3



Sl 4

Primjer 2. Izračunati $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, gdje je V oblast ograničena površima: $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$.

Oblast V (Sl 4) zapišimo u obliku $V:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^2\le y\le \sqrt{x} \\ 0\le z\le xy \end{cases}$. Slijedi, $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz=$

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\int_0^{xy} xyz\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^3y^3\,dy=\frac{1}{8}\int_0^1(x^5-x^{11})\,dx=\frac{1}{96}.$$

c) Osobine trostrukog integrala

Osobine trostrukog integrala su slične osobinama dvostrukog integrala (a ove sa osobinama jednostrukog integrala). Navedimo ih:

1) $\iiint\limits_V kf(M)dV = k\cdot\iiint\limits_V f(M)dV$, k - konstanta (svojstvo homogenosti),

2) $\iiint\limits_V (f_1(M)+f_2(M))dV = \iiint\limits_V f_1(M)dV + \iiint\limits_V f_2(M)dV$ (svojstvo aditivnosti).

3) Ako je $V = V_1 \cup V_2$. (oblasti V_1 i V_2 nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka), tada je $\iiint\limits_V f(M)dV = \iiint\limits_{V_1} f(M)dV + \iiint\limits_{V_2} f(M)dV$,

4) Ako je $\forall M\in V:\ f_1(M)\le f_2(M)$, tada je $\iiint\limits_V f_1(M)dV \le \iiint\limits_V f_2(M)dV$.

Specijalno:

4a) $\left|\iiint\limits_V f(M)dV\right| \le \iiint\limits_V |f(M)|dV$, jer je $\forall M\in V: f(M)\le |f(M)|$,

4b) Ako su m_1 i m_2 najmanja i najveća vrijednost funkcije $f(M)$ na skupu V, tada je $m_1\cdot V \le \iiint\limits_V f(M)dV \le m_2\cdot V$, gdje je V -zapremina oblasti V.

5) (teorema o srednjoj vrijednosti): Ako je funkcija $f(M)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti V, tada postoji tačka $M_0\in V$ takva da je $\iiint\limits_V f(M)dV = f(M_0)\cdot V$.

Vrijednost $f(M_0)$ nazivamo srednja vrijednost funkcije $f(M)$ na skupu V.

I